Przykładowe zadania. Różne typy.

Pierwszy typ zadań. Równania o zmiennych rozdzielonych.

Zadanie 1. Dla jakich parametrów y_0 równanie $y' = \frac{y^{4/5}}{x^2+1}$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ ma rozwiązanie jednoznaczne na $[0, \infty)$?

Zadanie 2. Dla jakich parametrów y_0 równanie $y' = e^{-x^2}y^2$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ ma rozwiązanie określone na $[0, \infty)$? Dla jakich na $(-\infty, \infty)$?

Zadanie 3. Dla równania $y' = (x + 1)y \ln y$:

- określ, czy istnieją rozwiązania stałe?
- odpowiedz, przy jakich warunkach początkowych rozwiązanie jest jednoznaczne?
- znajdź wszystkie rozwiązania ograniczone.

Zadanie 4. Niech $y(x)$ będzie rozwiązaniem równania $y' = x^2(\sin y)^{3/2}$ z warunkiem początkowym $y(1) = \frac{1}{2}\pi$. Oblicz $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Drugi typ zadań. Równania liniowe.

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnej ciągłej funkcji rosnącej $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równanie $y' = a(x)y+1$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie, które jest ograniczone na całej prostej.

Zadanie 6. Przypuśćmy, że $a(x)$ jest okresowe o okresie T i $\int_0^T a(x) > 0$. Wykaż, że równanie $y' = a(x)y$ nie ma niezerowych rozwiązań okresowych.

Zadanie 7. Wykaż, że nie istnieje funkcja $y(x)$ określona na dowolnym zbiorze otwartym zawierającym $[0, 2\pi]$, która jest klasy C^2, spełnia $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$ 3 oraz $y'' = -y$.

Zadanie 8. Niech $b(x)$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}$. Wykazać, że równanie $y' = -y + b(x)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie ograniczone na całej prostej.

Zadanie 9. Przypuśćmy, że $a(x)$ jest funkcją ciągłą na prostej i $a(x) > c > 0$ dla pewnego c. Załóżmy, że $b(x)$ jest inną funkcją ciągłą taką, że $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$.

Wykaż, że dowolne rozwiązanie równania $y' = -a(x)y + b(x)$ zbiega do 0 przy $x \to \infty$.

Trzeci typ zadań. Współrzędne biegunowe. Rozpatrujemy układ

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

Typowe zadania do tego układu, to: Znajdź wszystkie punkty (x_0, y_0) takie, że rozwiązanie startujące z punktu (x_0, y_0) jest:

- jest okresowe;
- jest ograniczone w przód;
- jest ograniczone w tył;
- nie przecina prostej $y = 0$ dla $t < 0$.

Przykładowa odpowiedź: wszystkie rozwiązania startujące z koła $\{x^2 + y^2 = 1\}$ są ograniczone w przód i w tył. Rozwiązania okresowe to rozwiązanie stałe (nie trzeba tego pisać) oraz rozwiązanie mające $x^2 + y^2 = 1$.

Uwaga: różne tego typu zadania można mieć wstawiając $\dot{x} = -y + xf(r)$ i $\dot{y} = x + yf(r)$ dla różnych fajnych funkcji f.

Czwarty typ zadań. Szacowania.

Zadanie 10. Wykaż, że każde rozwiązanie równania $y' = x + y^2$ ucieka do nieskończoności w skończonym czasie w przód.

Zadanie 11 (Trudniejsze)**.** Rozpatrujemy układ $y' = -x+y^2$. Rozstrzygnij, czy istnieje $y_0 > 0$ takie, że rozwiązanie z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ jest określone na całej półprostej dodatniej.

Zadanie 12. Niech $F(x, y)$ będzie gładką funckją o tej własności, że dla pewnego $L > 0$ zachodzi $|F(x, y)| < L|y|$ dla wszystkich $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wykaż, że dowolne rozwiązanie równania $y' = F(x, y)$ jest określone na całej prostej.

Zadanie 13. Niech $x(t), y(t)$ będzie rozwiązaniem układu:

$$\dot{x} = x^2 - y^2$$
$$\dot{y} = 2xy,$$

takim że $y(0) \neq 0$. Wykaż, że $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$.

Zadanie 14. Znajdź wszystkie rozwiązania nieograniczone układu

$$\dot{x} = x^3 - 3xy^2$$
$$\dot{y} = 3x^2y - y^3.$$

Uwaga: osoba, która zobaczy pewną regułę dotyczącą dwóch powyższych przykładów z łatwością wymyśli kilka podobnych zadań.

Piąty typ zadań. Równania ruchu i portrety fazowe.

Zadanie 15. Narysuj portret fazowy układu $\ddot{x} = -\sin x$.

Zadanie 16. Znajdź wszystkie rozwiązania okresowe układu $\ddot{x} = -x^2$.

Uwaga. Te zadania rozwiązuje się wprowadzając całkę pierwszą układu. Przypomnijmy, że układ $\ddot{x} = -U'(x)$, gdzie U jest funkcją gładką a primowanie oznacza branie pochodniej po x, ma całkę pierwszą $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)$.

Zadanie 17. Niech $H = H(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ będzie funkcją klasy C^2. Rozpatrujemy układ:

$$\dot{x}_j = -\frac{\partial H}{\partial y_j}$$
$$\dot{y}_j = \frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

Sprawdź, że funkcja H jest całką pierwszą tego układu.

Uwaga. H nazywa się w fizyce *Hamiltonianem* a powyższy układ nazywa się układem *Hamiltonowskim*. Więcej można o tym przeczytać w jedynej słusznej książce do mechaniki, autorstwa Arnolda.

Uwaga. Znudzeni ćwiczeniowcy (albo mający zły dzień) mogą się pokusić o wprowadzenie nawiasu Poissona i sprawdzenie tożsamości $\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0$, ale uważam to za sadyzm. To nie znaczy, że całkowicie potępiam...

Zadanie 18 (Być może fajne, a być może głupie)**.** Czy istnieją dwie funkcje $f(x, y), g(x, y)$ gładkie, o tej własności, że układ:

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

ma dokładnie dwa punkty stacjonarne, ale nie ma żadnych innych rozwiązań ograniczonych?

Szósty typ zadań. Szeregi.

Zadanie 19. Niech y będzie rozwiązaniem równania $y' = x + y^2$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0$. Znajdź kilka początkowych wyrazów rozwinięcia $y(x)$ w szereg potęgowy o środku w zerze. Oszacuj promień zbieżności tego szeregu.

Uwaga! Słowo 'oszacuj' oznacza konieczność wykonania jakiegoś rozumowania które wyprodukuje wynik np. promień zbieżności jest większy niż $1/4$.

Podobne zadania można robić. Szacowanie promienia zbieżności zazwyczaj jest trudne.

Zadanie 20. Rozpatrujemy równanie $y' = y + x + \mu y^2$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0$. Oblicz $\frac{\partial}{\partial \mu} y(1)$.

Podobnych zadań można robić dużo. Trzeba pamiętać, żeby równanie przy $\mu = 0$ dało się rozwiązać.